Ecuación estándar de una parábola vertical.

Hoja de trabajo 5. Ecuación estándar de una parábola vertical.

Actividad 1. Para el alumno. (Extraclase): Visita el códigos QR, para conocer acerca de la función cuadrática en particular sobre su gráfica. saca una copia con la información relativa al tema y cópiala en tu cuaderno ya que ésta la vas a usar en la siguiente hoja de trabajo.	Funciones cuadráticas. Forma estándar de una parábola.

En esta hoja de trabajo harás una interpretación algebro-geométrica de una ecuación polinomial de segundo grado de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{y = a\,(x - h)^2 + k} \qquad a \neq 0 \qquad (1)$$

Esto es, observarás la curva a que da lugar una expresión algebraica como la anterior y conocerás la relación entre la forma de esa curva y los parámetros a, h y k. Para ello emplearemos el programa GeoGebra.

Actividad para el alumno. Edición en GeoGebra de la ecuación estándar de una parábola vertical.

La ecuación (1) es la *ecuación estándar de una parábola vertical*. Nuestro interés es ver qué modificaciones obtenemos al hacer variar los parámetros numéricos a, h y k, empleando para ello el programa GeoGebra. **Realiza esta construcción con el apoyo de tu profesor.**

1. Puesto que queremos poder cambiar los valores numéricos de los parámetros a, h y k, los editamos al principio de nuestra actividad. Esto lo llevamos a cabo escribiendo en la línea de edición algebraica lo siguiente:

$a = 1$ $\qquad h = 0$ $\qquad k = 0$

Estos valores iniciales pueden ser otros, lo importante es tenerlos definidos desde el principio.

2. Ahora editamos la ecuación (1) escribiendo, de nuevo en la línea de edición, la siguiente expresión:

$$y = a\,(x - h)^2 + k$$

3. Mueve los parámetros a, h y k, de cualquier manera y describe la curva que obtienes.

¿Qué pasa cuando $a = 0$? ¿Esta condición está dentro de nuestra definición? Explica.

Abertura de la parábola y el parámetro a**.**

Veamos la forma de la parábola que obtenemos cuando hacemos variar el parámetro a.

4.Con valores cualesquiera de los parámetros h y k completa la siguiente tabla.

a	**la parábola abre hacia (arriba/abajo):**
> 0 (mayor que 0)	
< 0 (menor que 0)	
= 0	

Vértice de la parábola y los parámetros h, k. ***Máximos y mínimos***.

5. Puesto que la gráfica de la expresión (1) es siempre una parábola, entonces ésta debe tener un (único) vértice. Marca el punto:

$$\boldsymbol{V\,(h,\,k)}$$

y explica en dónde queda ubicado. ¿Será este punto el vértice de la parábola? Explica.

El valor de "y", para un "x" particular, se dice que es un máximo de la expresión algebraica (1) si este valor es el mayor posible. En forma análoga, el valor de "y", para un valor numérico particular de "x", se dice que es un mínimo de (1) si este es el menor valor numérico posible de todas las "y".

6. Con valores cualesquiera de los parámetros h y k completa la siguiente tabla. ¿Qué pasa cuando $a = 0$?

a	**la parábola tiene un (mínimo/máximo):**
> 0 (mayor que 0)	
< 0 (menor que 0)	

Traslación horizontal de la parábola con el parámetro h.

Puesto que h es la abscisa del vértice de la parábola, entonces al variarlo la parábola se moverá horizontalmente. Para comprobarlo haz lo siguiente.

7. Con valores cualesquiera $a \neq 0$ y k completa la siguiente tabla.

h	**la parábola se mueve hacia la (derecha/izquierda):**
al aumentarlo	
al disminuirlo	

Traslación vertical de la parábola con el parámetro k.

Puesto que k es la ordenada del vértice de la parábola, entonces al variar la parábola se moverá verticalmente. Para comprobarlo haz lo siguiente.

8. Valores cualesquiera $a \neq 0$ y h completa la siguiente tabla.

k	**la parábola se mueve hacia:**
al aumentarlo	
al disminuirlo	

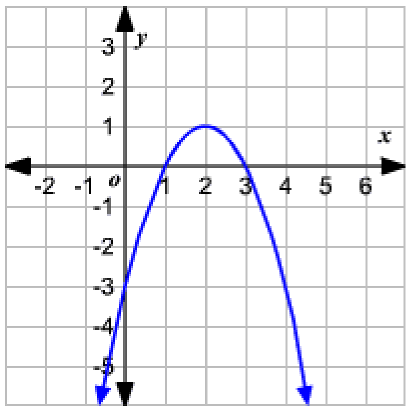
Actividad para el profesor. Eje de simetría de una parábola vertical.

Como ya se ha visto, la gráfica de una función cuadrática es una parábola, el eje de simetría de una parábola es una recta vertical que divide la parábola en dos mitades congruentes. El eje de simetría siempre pasa a través del vértice de la parábola. La coordenada en x del vértice es la ecuación del eje de simetría de la parábola.

Para una función cuadrática en la forma $y=ax^2+bx+c$, el eje de simetría es una recta vertical de la forma:

$$x = h = -\frac{b}{2a} \tag{2}$$

Ejemplo 1. Encuentra el eje de simetría de la parábola mostrada.



Solución:

Con la parábola mostrada, las coordenadas del vértice son $V(h,k)$.Es decir:

$$V(2,1)$$

Por lo tanto, según la expresión (2) el eje de simetría es:

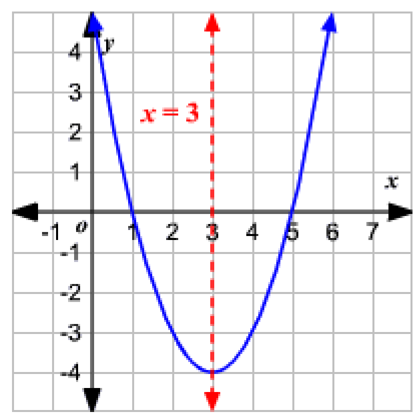
$$x=2$$

Ejemplo 2. Encuentra el eje de simetría de la gráfica de $y=x^2-6x+5$.

Solución: usando la expresión (2), $a=1$, $b=-6$ y $c=5$.

$$x=-\frac{(-6)}{2(1)}=\frac{6}{2}=3$$

El eje de simetría es: $x=3$.



Determinación de la ecuación estándar de una parábola.

Consideremos la expresión: $y=ax^2+bx+c$ y apliquemos el método de completar un trinomio cuadrado perfecto *(TCP).*

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$$

A continuación se completa el cuadrado sumando la mitad del coeficiente de en medio y elevando al cuadrado y restando lo mismo a "c" multiplicado por "a".

$$\left(\frac{1}{2}*\frac{b}{a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}$$

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a^2}$$

TCP

$$y = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c-\frac{b^2}{4a^2}\right)$$

Comparemos con la expresión: $y=a(x-h)^2+k$.

$$V(h,k) donde\ h = -\frac{b}{2a}\ y\ k = c-\frac{b^2}{4a}$$

Ejemplo 1. Determina las coordenadas del vértice de la parábola $y=2x^2-6x+4$.

Solución: Considerando que: a=2, b=-6 y c=4.

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-6)}{2(2)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$k = c-\frac{b^2}{4a} = 4-\frac{(-6)^2}{4(2)} = 4-\frac{36}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

El valor de k, se puede obtener también sustituyendo a $x=\frac{3}{2}$ que fue el valor de h en la función original, es decir $y=k$.

Finalmente: $V\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$

Ejemplo 2. Determina la forma estándar de la expresión $y=x^2+2x-8$.

$$y = (x^2+2x)-8$$
$$y = (x^2+2x+1)-8-1$$

TCP

$y = (x+1)^2-9\ldots$ Forma estándar.

EJERCICIOS.

Actividad para el alumno.

9. Traza las siguientes parábolas en tu cuaderno y determina la ecuación de su eje de simetría.

Parábola:	Eje de simetría (ecuación):
(a). $y = 3\,(x-1)^2 + 5$	
(b). $y = -5\,(x+4)^2 -3$	
(c). $y = x^2 -8x+1\ 5$	

10. ¿Cuántas parábolas tienen como eje de simetría a la recta $x = 0$? Explica.

11. Determina la abertura (hacia arriba o hacia abajo), las coordenadas del vértice y si es máximo o mínimo, así como la ecuación del eje de simetría de las siguientes parábolas verticales.

(a).	$y = 3(x-1)^2 + 5$	(d).	$y = -(x-\pi)^2 + 5$
(b).	$y = \sqrt{2}(x+9)^2 - 7$	(e).	$y = 3/2(x+1)^2 + 0.87$
(c).	$y = x^2 + 6x + 9$	(f).	$y = x^2 - 2x + 1$

Comprueba tus resultados con GeoGebra.

12. Completa la siguiente tabla.

Parábola: $y=x^2+bx+c$	**Parábola:** $y=a(x-h)^2+k$
	$y = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$
$y=3x^2+24x+50$	
$y=x^2-12x+27$	
	$y=-2(x-3)^2-5$
$y=5x^2+20x+17$	