Fase de cierre

Proyectos de Trabajo

En esta sección se exponen los proyectos que los estudiantes, organizados en equipos de tres, tendrán que realizar a lo largo de esta unidad didáctica. Estos proyectos pretenden orientar al estudiante para que construya algunos de los significados más importantes a los que remite la noción de función cuadrática, verbigracia, aquellos fenómenos o procesos en los que se busca su optimización. Bajo esta orientación, se plantea un problema de esta naturaleza, es decir, un problema que puede modelarse con una función cuadrática, con lo que al irlo desarrollando los estudiantes se van viendo involucrados en los elementos generales de una función: su dominio, rango y regla de correspondencia, además de las características propias de las funciones polinomiales de segundo grado, a saber, que son el modelo básico para optimizar procesos.

Estos proyectos son planteados a los estudiantes en cualquier lugar de esta unidad didáctica (fase de inicio o desarrollo) y su evaluación se hará al final de la unidad didáctica con la exposición del mismo, por equipo, a sus demás compañeros. El proyecto será supervisado todo el tiempo por el profesor, con lo que tendrá la oportunidad de ir viendo el avance de sus estudiantes a lo largo del desarrollo de esta unidad didáctica.

Actividades para los alumnos con el apoyo del profesor

Proyecto A. Funciones cuadráticas: cálculo del área máxima de un rectángulo (cuadrado) construido con un alambre de 18 cm.

1. Dobla un alambre de 18 cm. de longitud y construye rectángulos o cuadrados, mide el área de las figuras construidas con ayuda de la cuadrícula de la figura 1, completa la siguiente tabla y contesta las preguntas subsecuentes..

Tabla 1. Construcción de rectángulos y cuadrados con un alambre de 18 cm. de longitud			
longitud de la base (cm)	**altura (cm)**	**área del rectángulo construido (cm2)**	**pares de la función área: (base, área)**
0			
1			
2			
3			

Tabla 1. Construcción de rectángulos y cuadrados con un alambre de 18 cm. de longitud

longitud de la base (cm)	altura (cm)	área del rectángulo construido (cm2)	pares de la función área: (base, área)
4			
5			
6			
7			
8			
9			

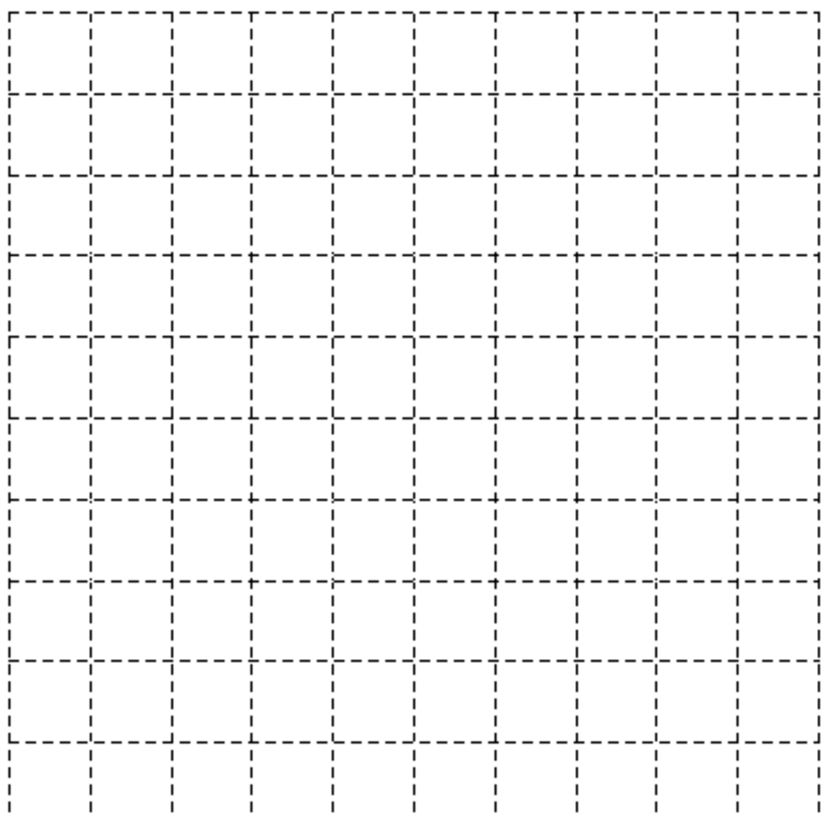


Figura 1. Cuadrícula para medir áreas de rectángulos. Cada cuadrado mide 1 cm^2.

2. ¿Puedes construir rectángulos en los que la longitud de su base sea menor que 0 cm.? Explica.

¿Puedes construir rectángulos en los que la longitud de su base sea mayor que 9 cm.? Explica.

De lo anterior se puede concluir que sólo es posible formar rectángulos con el alambre cuando su base es mayor o igual a 0 cm., pero menor o igual a 9 cm., pues dentro de este ***dominio de valores*** habrá una altura posible para construir un rectángulo con el alambre. Fuera de este dominio no es posible construir rectángulo alguno.

3. Para medir el área de los rectángulos construidos con el alambre hemos procedido de la siguiente manera. Fijamos o predeterminamos la longitud de la base, construimos el rectángulo y medimos su área empleando la cuadrícula de la figura 1. De esta manera podemos decir que ***el área de cada rectángulo depende de la longitud de la base*** y que, además, ***la longitud de la base no puede ser menor que 0 cm ni mayor que 9 cm***. De esta manera tenemos ante nosotros la función área de un rectángulo (construido con un alambre de 18 cm), de manera que podemos escribirla de la manera siguiente:

función área: (base, área),

en donde $0 \leq base \leq 9$. Ahora, con las mediciones de la primera y tercera columna de la tabla 1, y tomando en cuenta las restricciones de medida de la base, completa la cuarta columna de la tabla 1, con ello tendrás sólo 10 pares de la función altura.

4. Marca los puntos de la cuarta columna de la tabla 1 en el plano cartesiano de la figura 2. Estos puntos pertenecen a la ***gráfica de la función*** área, ¿qué curva crees que trace? Explica.

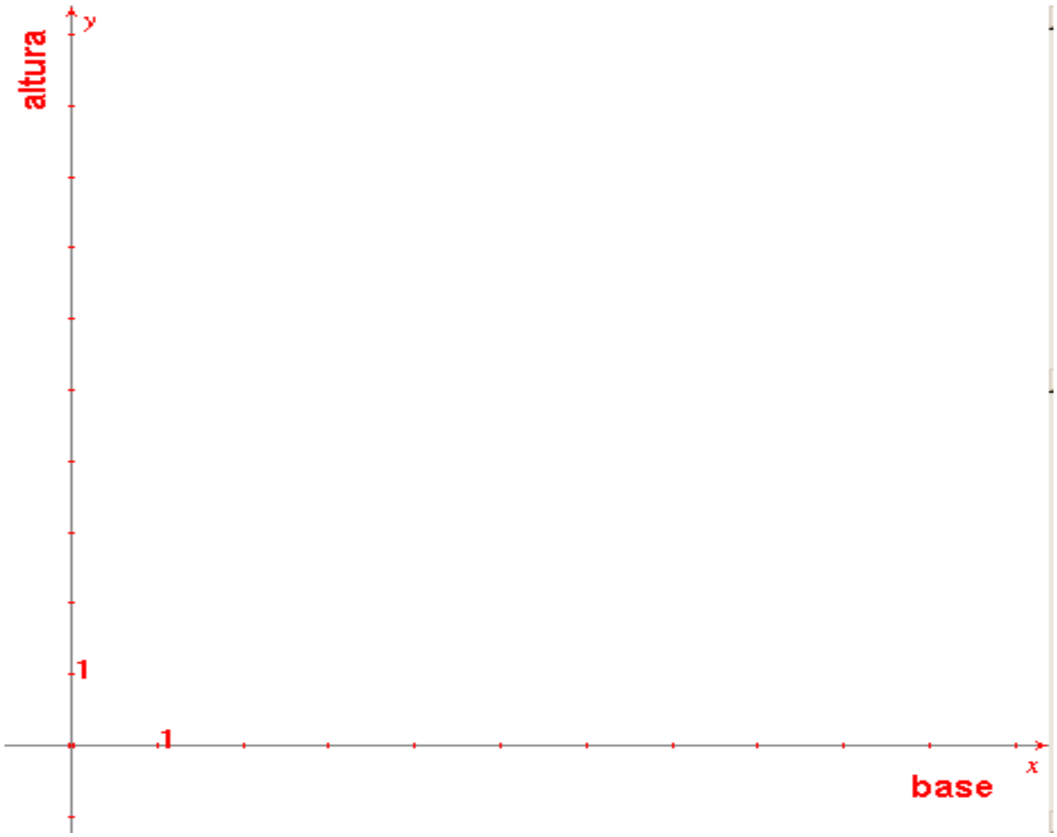


Figura 2. Plano cartesiano.

5. Para percibir con mayor precisión la gráfica de la función área podemos calcular más pares ordenados de números o puntos de la forma *(base, área)*, a condición solamente de que la longitud de la *base* esté entre *0 cm* y *9 cm*. Con esto en mente, completa la siguiente tabla y marca los puntos de la tercera columna en el plano cartesiano de la figura 2.

Tabla 2. Función área.		
base (cm.)	**área (cm.)**	**pares de la función área: (base, área)**
0.5		
1.5		
2.5		

Tabla 2. Función área.		
base (cm.)	**área (cm.)**	**pares de la función área: (base, área)**
3.5		
4.5		
5.5		
6.5		
7.5		
8.5		

6. Para saber exactamente qué curva define la gráfica de la función altura podríamos continuar dividiendo el intervalo [0, 9] con más y más puntos, pero, ¿este proceso tiene fin? Explica.

7. Si tu respuesta a la pregunta anterior fue que el proceso de división anterior no tiene fin, o sea, es ***infinito***, entonces tenemos que usar otros medios para conocer de manera precisa la forma geométrica que tiene la gráfica de la función altura. En este caso ya no se trata, al parecer, de un segmento de recta, sino de otra curva. ¿qué curva (o parte de) crees que sea? Explica.

En el caso de que la gráfica de la función área sea una parte de una ***parábola vertical***, o de cualquier otra curva de segundo orden (circunferencia, elipse hipérbola o parábola), entonces la gráfica de la función deberá quedar completamente caracterizada por cinco puntos de la misma. Sin embargo este método geométrico es un poco más laborioso y se hará en las actividades extra clase. Aquí vamos a emplear un método mucho más eficiente que es el ***análisis de regresión***, método que sirve no sólo para funciones polinomiales de segundo grado sino, en general, para una amplia gama de funciones y que es empleado con frecuencia en estadística y que la mayoría de las hojas de cálculo como Excel lo llevan a cabo como parte de su menú de opciones.

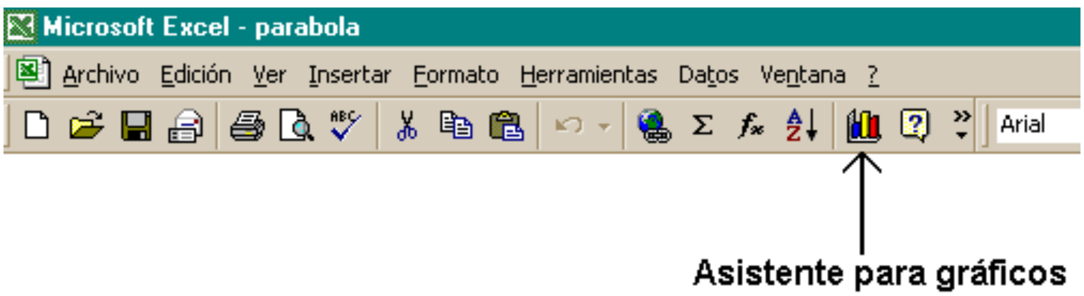
8. La manera de proceder con un análisis de regresión, a partir de los datos (base, área) ya recabado en las tablas 1 y 2, con el programa Excel es como sigue.

   a) Abrimos una hoja de cálculo en Excel.

   b) En la primera columna (columna A), editamos las longitudes de las bases de las tablas 1 y 2.

   c) En la segunda columna de la hoja, editamos los valores correspondientes a las áreas de la base del rectángulo que les correspondan.

   d) Una vez que hayamos hecho lo anterior, tendremos en la hoja de cálculo dos columnas con 19 datos cada una. Ahora las sombreamos y seleccionamos de la barra de tareas "Asistente para gráficos", como se muestra en la imagen siguiente:



   e) Al elegir el "Asistente para gráficos" se abre una ventana como la siguiente. En esta ventana se debe elegir el tipo de gráfico XY (Dispersión).

f) Después, simplemente vaya aceptando las demás instrucciones hasta que llegue a la ventana en donde se van a editar el título de la gráfica ("Función área"), el nombre de los valores del eje X ("longitud de la base") y el nombre de los valores del eje Y ("área del rectángulo"). Por último, Excel pregunta si quieres que la gráfica aparezca en una nueva hoja o en donde están tus datos. Esto tú lo eliges.

Al hacer lo anterior te quedará una gráfica parecida a la siguiente:

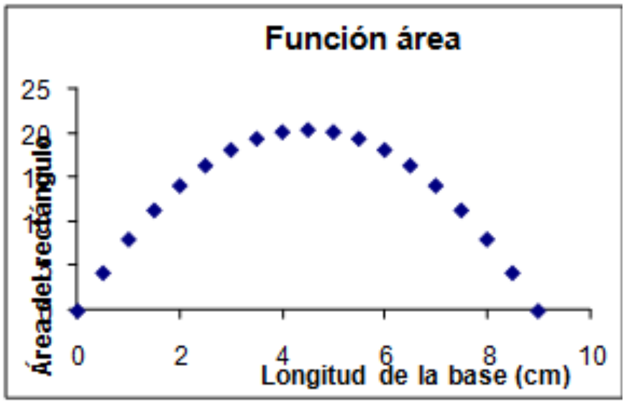
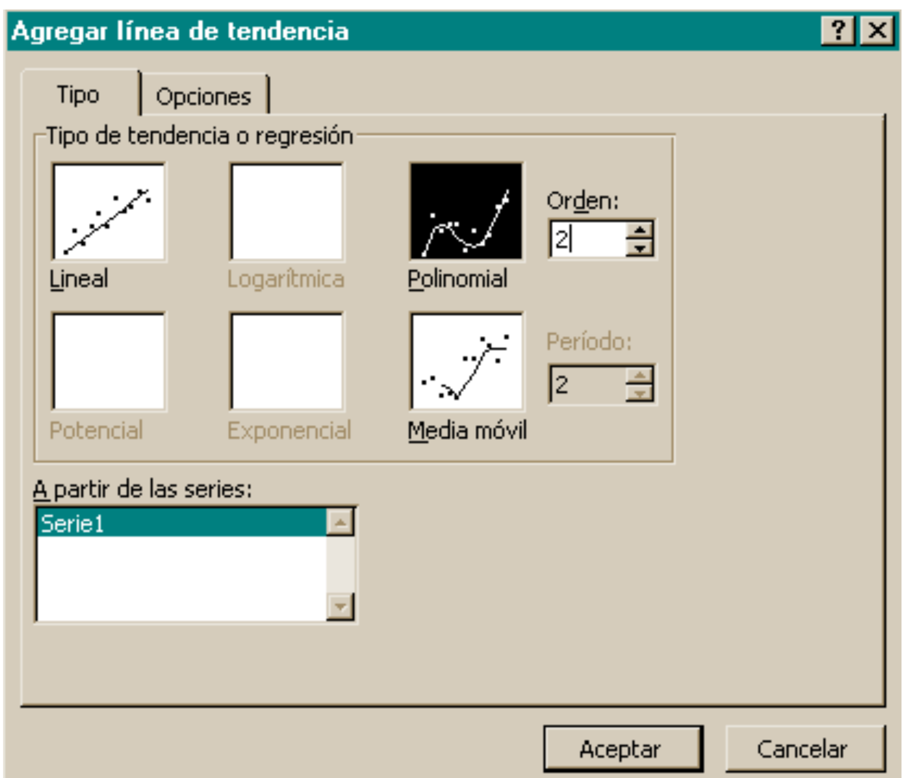
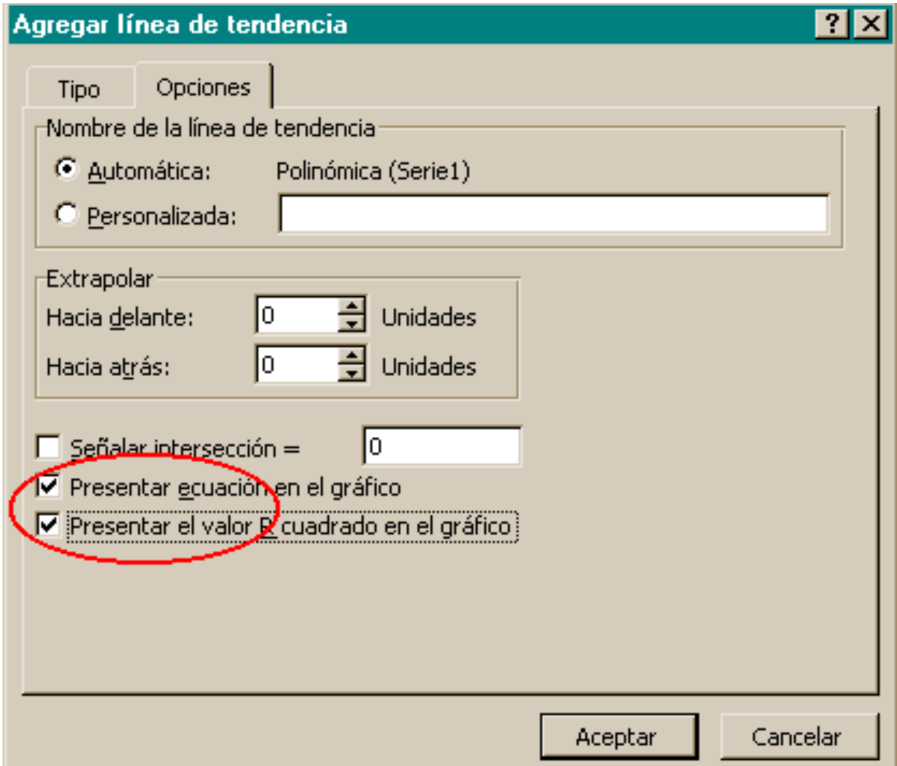


Figura 3. Puntos de la función área establecidos en las tablas 1 y 2.

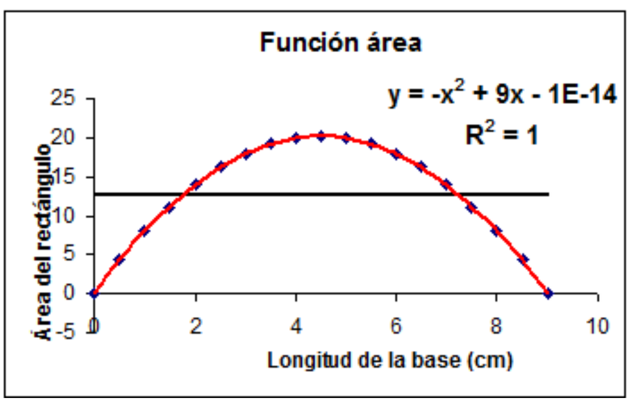
g) Ahora, para "ajustar" nuestros datos, abre el menú "Gráfico" (no el "Asistente para gráficos") y elige la opción "Agregar línea de tendencia". Al hacerlo se abrirá la ventana siguiente, en donde elegirás el Tipo Polinomial, de Orden 2. ¡Todavía no cierres esta ventana!



h) Ahora selecciona la carpeta Opciones de esta ventana y marca las opciones "Presentar ecuación en el gráfico", así como "Presentar el valor R", como se muestra a continuación:



i) Al hacer lo anterior obtendrás finalmente una gráfica de la función área como la siguiente:



Pero no sólo has obtenido la gráfica, sino también su expresión algebraica (al ordenarle a Excel que presente la ecuación del análisis de regresión), a saber, la fórmula $y = -x^2 + 9x - 1E-14$ que, en última instancia podemos tomar como la fórmula siguiente:

$$y = -x^2 + 9x$$

pues el valor *1E-14* es una forma abreviada de escribir el número siguiente:

Por último, cabe comentar que el valor R^2, que también calculó el programa, se llama ***coeficiente de correlación*** y es una medida de lo "lejano" o "cercano" que están los datos con relación a la curva ajustada, o sea, la co-relación entre los datos y la curva que les imponemos para "ajustarlos". Más aún, en la medida en que R^2 esté cercano a *1*, mejor será esta aproximación.

9. Por otra parte, la fórmula calculada por medio del análisis de regresión la podemos obtener algebraicamente (exactamente) de la siguiente manera:

   a) Con el alambre hemos construido los rectángulos predeterminando la longitud de la base (vea tabla 1), y esta longitud la elegimos de manera arbitraria, aunque dentro del rango que va de *0 cm* a *9 cm*. Por esa razón diremos que la longitud de la base es la ***variable independiente*** de la *función área* y emplearemos la letra "x" para referirnos a ella.

   b) Una vez elegida la longitud de la base "x" construimos el rectángulo y, con ayuda de la cuadrícula (o de otra manera), medimos el área del rectángulo que se obtiene al doblar el alambre, de manera que ésta área se puede considerar como un resultado de haber doblado el alambre con una longitud determinada (la base), por lo que llamaremos a el área así obtenida la ***variable dependiente***, pues ésta depende de la longitud de la base elegida al principio del proceso de doblez. Más aún, llamaremos a cada una de esas áreas el ***valor de la función área***, correlativa con su longitud de base respectiva y nos referiremos a ella con la letra "y".

   c) Ahora bien, ¿cómo están relacionadas las cantidades "x" y "y"? La respuesta a esta pregunta la proporcionarán los cálculos que hemos realizado para completar la segunda y tercera columna de la tabla 1 o, de manera abreviada, los cálculos realizados para completar la segunda columna de la tabla 2. Recordando la manera en que hemos realizado los cálculos de la primera tabla tenemos lo siguiente:

      i. Dada una longitud para la base del rectángulo, calculemos su altura "y", en términos de la longitud del alambre (18) y de la longitud de la base "x", de la manera siguiente:

         altura = y = ____.

      ii. Después calculemos el área del rectángulo obtenido y, como tanto la base "x" como la altura "y" están dados por la base misma "x", encontramos que el área queda en dependencia únicamente de "x":

         $área = base * altura = xy =$ ____.

   De esta manera, la ***función área*** tiene la siguiente forma:

   y = ______________________________

10. Compara la fórmula de la función área que obtuviste en la pregunta anterior con la fórmula que se obtuvo por medio del análisis de regresión hecho por el programa Excel. Escribe tus conclusiones al respecto.

11. Ahora calcula las dimensiones de los rectángulos (cuadrados) que puedan construirse con alambre de 18 cm de largo y que tengan el área mayor posible.

12. Por último, escribe tus conclusiones generales acerca de la función área analizadas en esta secuencia didáctica.

Gráfica de la función área:
Dominio de la función área:
Co-dominio de la función área:
Fórmula de la función área:
Valor mínimo de la función área:
Valor máximo de la función área.
Otras características de la función área:

Proyecto B. Cercado del máximo terreno rectangular con un lado en la ribera de un río.

Este proyecto consiste en resolver el siguiente problema, para lo que se sugiere realices la hoja de trabajo dada a continuación.

Problema:

Se desea cercar un campo rectangular situado en la ribera de un río. El material para la cerca cuesta $80.00 por metro, para los dos extremos laterales, mientras que el costo del material para el lado paralelo al río (frente del terreno) es de $120.00 por metro. Si se tienen $36,000.00, ¿de qué dimensiones tienen que ser los lados y el frente para obtener un área máxima cercada?

1a. Parte. Acercamiento al problema.

A. Haz un croquis de la situación planteada en este problema.

i. ¿Los lados laterales deben ser iguales? ______________________________________ .

ii. ¿El frente tiene necesariamente la misma longitud que alguno de los lados? ____.

B. Modelación del problema con GeoGebra.

Traza con GeoGebra la situación planteada en el problema. Para ello considera lo siguiente.

1. ¿Cómo modelarías la ribera del río?

   a) Con un segmento de recta. b) Con una semirrecta. c) Con una recta.

2. ¿Cómo acomodarías la ribera del río en el plano de GeoGebra?

   a) En cualquier posición. b) Horizontalmente. c) Verticalmente.

3. ¿Cuántos lados de la cerca rectangular tienes que construir?

   Número de lados por construir = ________________________.

4. Haz un rectángulo en donde uno de sus lados sea fijo (la ribera del río), mientras que los tres lados restantes sean movibles.

5. Con este modelo, y moviendo los lados de la cerca, completa la siguiente tabla.

longitud del lateral (m)	longitud del frente (m)	costo de la cerca ($)
100	50	
100		36 000
150	200	
	250	36 000

C. Modelación algebraica del problema.

¿Qué variables de este problema pueden ser tomadas como variables independientes?

a) ¿Cómo están relacionados los lados, el frente y la cantidad de dinero que vas a invertir en la cerca?

b) De esta manera el frente (o el lado) queda en dependencia del lado (frente). Despeja el frente, para que el problema quede en dependencia de la variable independiente “lado”.

frente =

c) ¿Cuál crees que es la función o modelo matemático de la situación planteada en el problema? Escríbelo en la siguiente línea.

área terreno = ____ .

d) Compara tu modelo con el de los demás equipos y escribe el modelo que se concluye después de esta discusión:

Cálculo del área máxima posible bajo las condiciones del problema.

e) ¿Qué valor tiene el coeficiente de x2? _____ .

f) Este valor proporciona un máximo o un mínimo. _________________________ .

g) Como te podrás dar cuenta, la función anterior es una parábola. Escríbela en su forma estándar (o normal):

(**Sugerencias:** puedes emplear las fórmulas de la generalización del problema anterior, la cual se anexa al final del documento).

h) ¿Qué representan las coordenadas (h, k) del vértice de la parábola? (Nota: toma en cuenta que no se te pregunta el valor de h y k, sino su significado).

h: ______________________________ ;

k: ______________________________ .

i) ¿Cuánto tiene que medir el lado y el frente para esta área máxima?

lado = _____________ ,   frente = ____________ _ .

Observaciones y conclusiones.

Escribe sucintamente tus observaciones y tu conclusión acerca del tema expuesto.

Generalización.

Lo anterior es una conclusión cuya formulación general es la siguiente. Si un fenómeno o situación está modelado por medio de una función cuadrática:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Entonces dicha situación alcanza su valor extremo____para,______en donde (h,k) son las coordenadas del vértice de la parábola que describe esta función. Para calcularlas se expresa a esta función en su forma estándar (o normal) que es la siguiente:

$$y = a(x - h)^2 + k$$

En donde:

$h = -\frac{b}{2a}$		$k = c - \frac{b^2}{4a}$

El valor x=h da lugar a un **mínimo** de la función, cuando $a > 0$; y un valor **máximo** cuando $a < 0$.

En nuestro caso la función que modela el área del rectángulo construido por la cerca es:

Por lo que:

y, puesto que $a = -1 < 0$ se tiene un valor máximo.

Proyecto C. Cálculo del volumen máximo al doblar una lámina.

Este proyecto se basa en la resolución del siguiente **problema**:

De una pieza de metal de 40 cm. de ancho por 3m. de largo, se va a construir un canal para la lluvia doblando una lámina de la forma siguiente:

¿Qué altura debe tener el doblez para que el volumen sea máximo?

La finalidad de este proyecto es hacer visible al estudiante diversas situaciones que involucran cambio y que dan origen a funciones cuadráticas, para lo cual el alumno usará la siguiente hoja de trabajo.

1a. Parte. Acercamiento al problema.

A. Haz un croquis de la situación planteada en este problema.

i. ¿Los lados laterales deben ser iguales? ____ .

ii. ¿La base tiene necesariamente la misma longitud que alguno de los lados? ____ .

2a Parte. Exploración del problema con un modelo virtual.

i. Empleando el modelo virtual (Volumen Canal), completa la siguiente tabla.

ancho de la base (m)	área de la base (m2)	altura (m)	volumen del canal (m3)
0.40			
		0.08	
	0.95		
			0.04

3a Parte. Modelación algebraica del problema.

i. Escribe una fórmula para calcular el área de la base del canal de acuerdo con la longitud de su ancho.

área de la base = ______________________.

ii. ¿Qué ocurre con la altura del canal, cuando cambias el ancho de su base? Explica brevemente.

iii. Establece una fórmula para obtener la altura del canal a partir del ancho que elijamos para su base.

altura del canal = ______________________.

iv. Escribe una fórmula para calcular el volumen del canal a partir del ancho que elijamos para la base.

volumen del canal = ______________________. (1)

v. A partir de esta fórmula, que es una función cuadrática, calcula el valor del ancho de la base para obtener el volumen máximo del canal.

ancho para el volumen máximo = ______________________ m.

volumen máximo = ______________________ m3.

4a Parte. Modelación geométrica del problema.

i. Traza la gráfica de la función del volumen (1) en GeoGebra.

ii. ¿Cuáles son los valores que el ancho de la base del canal puede tomar? Es decir, ¿cuál es el dominio de la función volumen?

ancho mínimo = ______________ m. ancho máximo = ______________ m.

iii. ¿Cuáles son los valores, mínimo y máximo, que puede alcanzar el canal? Es decir, ¿cuál es el rango de la función volumen?

volumen mínimo = ______________ m^3. volumen máximo = ______________ m^3.

iv. En GeoGebra, encuadra la gráfica de esta función de acuerdo a su dominio y rango.

v. ¿Qué tipo de curva corresponde a la gráfica de esta función?

vi. Describe la(s) *simetría(s)* de esta gráfica anterior. ¿Con respecto a qué objeto geométrico se obtiene(n) esta(s) simetría(s)?

vii. ¿En qué punto de esta gráfica encuentras su valor máximo?

viii. Escribe las coordenadas del punto máximo:

M:(______, ______)

ix. ¿Qué relación hay entre las coordenadas del punto M y el ancho de la base y el volumen del canal?

Proyecto D. Cerca de un terreno rectangular de área máxima.

Este proyecto se basa en la resolución del siguiente **problema**.

Pedro tiene 100 m de malla de alambre y va a cercar un terreno rectangular para usarlo como espacio de juegos ¿Cuáles son las dimensiones del terreno a fin de que el área encerrada sea la mayor posible.

1a. Parte. Acercamiento al problema.

Para resolver este problema, como cualquier otro, conviene imaginarnos la situación planteada bajo las condiciones del mismo. En este caso, por ejemplo, comencemos por hacer un esbozo o esquema del problema.

a) Completa la siguiente tabla.

Tabla 1. Experimento con el área de un rectángulo.

largo (m)	ancho (m)	Área (m2)
5		
	40	
0		
	60	
25		
	2	
50		

b) Describe brevemente la situación cuando la longitud es igual a 0.

c) Describe brevemente la situación cuando la longitud es igual a la mitad de la longitud del alambre.

d) ¿Qué ocurre si queremos que el ancho del terreno sea mayor que la mitad de la longitud de la malla de alambre? Explica brevemente.

e) ¿Qué ocurre con el ancho y el área del rectángulo que formas cuando primero fijas la longitud? ¿Puede ser del tamaño que quieras? Explica brevemente.

Como puedes observar, el ancho queda automáticamente determinado cuando se fija la longitud. Esto se debe a que la longitud, el ancho y la longitud de la malla de alambre satisfacen la siguiente relación:

Longitud de la malla de alambre = perímetro del rectángulo = 2*largo + 2*ancho.

De esta manera, podemos asumir que la longitud es la **variable independiente** del problema, mientras que el ancho y el área quedan completamente (automáticamente) determinadas a partir de aquélla; o sea, son **variables dependientes.**

a). Completa la siguiente tabla:

Tabla 2. Área de un rectángulo con la longitud de la base como variable independiente.		
largo (m)	**ancho =**	**área =**
0		
5		
7		
10		
12		
15		
20		
25		
30		
35		
40		
45		
50		

b) Marca los puntos **(largo, área)** que obtuviste en la actividad anterior en el siguiente plano cartesiano.

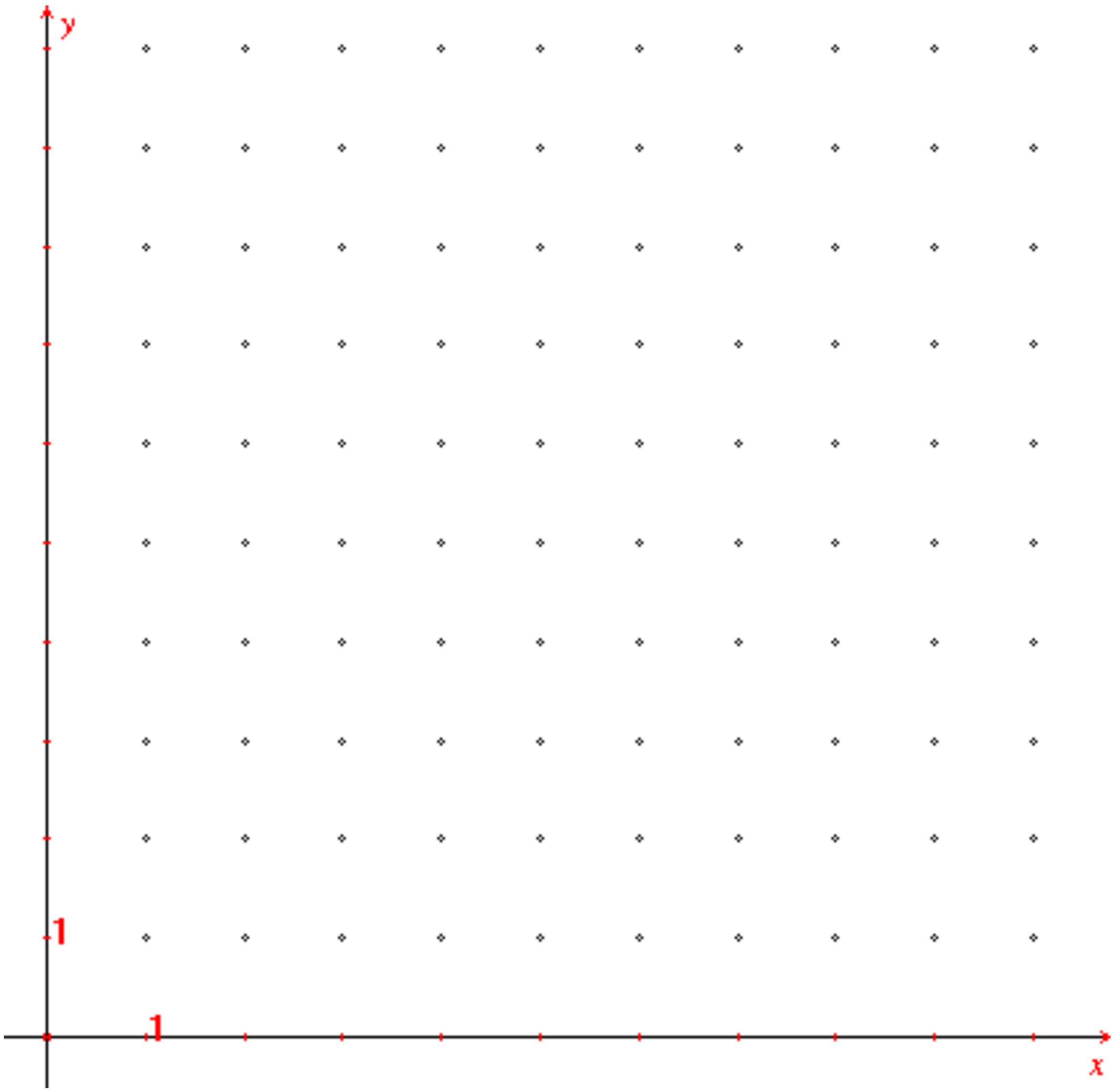


Figura 1. Puntos de la gráfica de la función longitud vs área de un rectángulo con perímetro fijo.

c) ¿Encuentras alguna *simetría* con los puntos marcados en la gráfica anterior? En tal caso, ¿con respecto a qué o quién está dada? Explica.

d) ¿Hay algún punto en donde la función tiene un valor máximo? ____________________ .

e) Escribe las coordenadas del punto extremo; o sea, escribe la longitud y el área para la cual ésta es máxima: **(,).**

Ahora obtendremos el modelo completo de la situación bajo consideración. Para ello, basta considerar cómo está dependiendo el área a partir de la base.

Recapitulando tenemos lo siguiente:

- la altura calculada a partir de la base:
- el área de un rectángulo:
- Por lo que se tiene lo siguiente:

área =

Esta última expresión, se suele expresar matemáticamente de la siguiente manera:

(1)

Como sabes, esta última ecuación representa una parábola. Como hemos visto, este es el modelo matemático del problema del rectángulo construido con una malla de alambre. Ahora, para concluir nuestro estudio del área máxima de esos rectángulos hagamos lo siguiente.

a) Determina la forma estándar (o normal) de la parábola dada por la ecuación (1).

b) ¿Qué representan las coordenadas (h, k)del vértice de la parábola? (Nota: se te pregunta el significado de estos números, no su valor.)

$h =$ ______________________________ ;

$k =$ ______________________________

Actividades adicionales para los alumnos.

Con base en estos 4 proyectos de trabajo y a lo expuesto en las fases de inicio y desarrollo, resuelve los siguientes problemas tomando como base la estructura que se te proporcionó líneas arriba.

1. Determine las coordenadas del vértice de la parábola $y = x^2 - 10x + 24$.
2. Se desea hacer un canalón con una lámina larga rectangular, metálica, de 12 pulgadas de ancho. Se doblan dos orillas hacia arriba para que queden perpendiculares al fondo. ¿Cuántas pulgadas debe quedar hacia arriba para que el canalón tenga capacidad máxima?
3. Un proyectil se dispara verticalmente hacia arriba desde una altura de 600 pies sobre el piso. Su altura en pies $h(t)$ a los "t" segundos, está expresada por: $h(t) = -16t^2 + 803t + 600$.

   a) Determine el tiempo en el que el proyectil alcanza su altura máxima.

   b) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el proyectil?
4. De una pieza de metal de 50 cm. de ancho por 5 m. de largo, se va a construir un canal para la lluvia doblando una lámina de la forma perpendicular a la base. ¿Cuántos centímetros debe quedar hacia arriba para que el canalón tenga capacidad máxima?
5. Pedro tiene 100 m. de malla de alambre y va a cercar un terreno rectangular para usarlo como espacio de juegos ¿Cuáles son las dimensiones del terreno a fin de que el área encerrada sea la mayor posible.
6. Roberto tiene 50 m., de tela de alambre para cercar una cancha de fútbol rectangular. Si su área fuera de 150 m^2.

   a) Si $f(x) = área$. ¿Cuál es la función que representa esta situación?

   b) ¿Cuánto medirá el largo y cuanto el ancho?
7. Determine dos números cuya suma sea 10 y cuyo producto sea máximo.
8. Obtenga dos números cuya diferencia sea 14 y cuyo producto sea mínimo.
9. Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba desde la azotea de un edificio, con velocidad inicial de 144 pies/segundo, su distancia en pies sobre el piso a los segundos está dada por:

   a) Calcule su altura máxima sobre el piso.

   b) Obtenga la altura del edificio.

   Respuesta: a) 424 pies, b) 100 pies.

Nota: la fórmula de *Galileo* para la caída libre, nos da la altura del objeto en cada instante *t* de la caída. $y(t) = -\frac{1}{2}g * t^2 + V_0 * t + y_0$.. Simplificando y tomando $g = 9.8\ m/seg^2$. $y(t) = -4.9t^2 + V_0 * t + y_0$. Donde y_0 representa la altura del objeto.